Clase # 10

Teoría dual e interpretación económica

10-1

Asociado a todo problema de P.L, existe otro problema lineal llamado dual. Por tanto al problema original se le llama primal.

10-2

El análisis de sensibilidad se enriquece cuando se estudia el problema dual, dado que la solución del dual corresponde a los precios sombra de las restricciones del primal.

10-3

TEORÍA DE DUALIDAD

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \text{para } i = 1,2,....,m$$

$$x_j \ge 0 \quad \text{para } j = 1, ...,n$$

$$\text{Min } y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \text{para } j = 1,2,....,n$$

$$y_i \ge 0 \quad \text{para } i = 1, ...m$$

10-4

En notación matricial

$$\text{Max } Z = \underline{c}\ \underline{x}$$

S. a

$$\underline{A}\ \underline{x} \le \underline{b}$$

$$\underline{x} \ge \underline{0}$$

$$\text{Min } y_0 = \underline{y}\ \underline{b}$$

S. a

$$\underline{y}\ \underline{A} \ge \underline{c}$$

$$\underline{y} \ge \underline{0}$$

10-5

Veamos como ejemplo el caso de la Wyndor.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

S.a

$$x_1 + 0x_2 \le 4$$

$$0x_1 + 2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Min } y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

S.a

$$1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \ge 3$$

$$0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

10-6

Ahora en forma matricial.

Max $Z = \begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

S.a

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}4\\12\\18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Min $y_0 = \begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\12\\18\end{bmatrix}$

S.a

$$\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\\3 & 2\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Para hallar la correspondencia entre ambos problemas se utiliza la tabla primal-dual.

Problema Dual		Problema Primal				
		Coeficiente de			Lado derecho	
		x_1	x_2	x_n		
Coeficiente de	y_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	$\le b_1$	Coeficientes F.O. (minimizar)
	y_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	$\le b_2$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	$\le b_m$	
	Lado derecho	$\ge c_1$	$\ge c_2$	$\ge c_n$		

Se puede observar el problema primal por filas, es decir verticalmente. Horizontalmente, esto es por columnas se observa el problema dual

Problema Dual		Problema Primal			
		Coeficiente de		Lado derecho	Coeficientes F.O.
		x_1	x_2		
Coeficiente de	y_1	1	0	$\le$ 4	
	y_2	0	2	$\le$ 12	
	y_3	3	2	$\le$ 18	
	Lado derecho	$\ge$ 3	$\ge$ 5		

Fundamentalmente.

Un Problema | **Otro problema**

Restricción i → Variable i

Función objetivo → Lados derechos

Obtencion de cualquier tabla a partir de la tabla simplex inicial

⇩

$$\begin{bmatrix}1 & c_B B^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -c & 0 & 0\\ 0 & A & I & b\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1} b\\ 0 & B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1} b\end{bmatrix}$$

Origen del problema dual.

Si hacemos:

$y = c_B\ B^{-1} = (y_1, y_2, \ldots y_m)$

$y_0 = c_B B^{-1} b = y\,b = \sum b_i y_i$

$z = c_B\ B^{-1} A = yA = (z_1, z_2, \ldots z_n)$

donde $z_j = \sum a_{ij} y_i$

donde c_B son los coeficientes de las variables basicas en la funcion objetivo y B son los vectores columna en (A,I) de esas mismas variables.

Renglón (o) tabla simplex

Iter	V.B	Ec #	Coeficiente de								L.D
			Z	x_1	x_2	....	x_n	x_{n+1}	......	x_{n+m}	
Cual-quiera	Z	0	1	z_1-c_1	z_2-c_2	......	z_n-c_n	y_1		y_m	y_0

En términos de esta notación, el método simplex trata de buscar un conjunto de variables básicas y la solución B.F correspondiente, tal que *<u>todos</u>* los coeficientes en el renglón (0) sean no negativos

10-13

La condición de optimalidad dice que:

$$z_j - c_j \geq 0$$
$$y_i \geq 0$$

para j = 1,...,n i = 1,....,m

10-14

Iter	Problema primal	Problema dual					
	Renglón (0)	y_1	y_2	y_3	z_1-c_1	z_2-c_2	
0	[-3 -5 ⋮ 0 0 0 ⋮ 0]	0	0	0	-3	-5	0
1	[-3 0 ⋮ 0 5/2 0 ⋮ 30]	0	5/2	0	-3	0	30
2	[0 0 ⋮ 0 3/2 1 ⋮ 36]	0	3/2	1	0	0	36

Donde

z_1-c_1 = y_1 + $3y_3$ - 3

z_2-c_2 = $2y_2$ + $2y_3$ - 5

⇒ **Valores de las variables de exceso para el problema dual**

10-15

Cuando se está resolviendo el problema primal, el problema dual es no factible. Sólo se vuele factible cuando se halla la solución óptima.

Veamos algunas propiedades entre el primal y el dual

10-16

<u>1.Propiedad de dualidad débil.</u> $\underline{c}\,\underline{x} \leq \underline{y}\,\underline{b}$

Cualquier solución factible en el primal tiene un valor menor o igual que una solución factible en el dual

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow Z = \underline{c}\,\underline{x} = 24$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow y_0 = \underline{y}\,\underline{b} = 52$$

Siempre se cumple porque el valor máximo factible de Z es igual al valor mínimo factible de y_0

10-17

<u>2.Propiedad de dualidad fuerte.</u>

$$\underline{c}\,\underline{x}^* = \underline{y}^*\,\underline{b}$$

En el óptimo ambas soluciones son iguales.

10-18

3.Propiedad de soluciones complementarias.

En cada iteración, el simplex determina una solución FEV $\underline{X}$ del primal, y una solución complementaria $\underline{Y}$ del dual que puede ser no factible. Es decir, en cada paso se obtienen variables básicas para el primal, y los valores de las variables de holgura son las soluciones del dual

$$\underline{c}\,\underline{x} = \underline{y}\,\underline{b}$$

10-19

4.Propiedad de soluciones complementarias óptimas.

En la tabla simplex final, se obtiene la solución óptima x^* del primal, y se obtiene la solución óptima complementaria y^* del dual, y en este punto ambas son factibles.

$$\underline{c}\,\underline{x}^* = \underline{y}^*\,\underline{b}$$

Los valores de y_i^* se denominan precios sombra para el problema primal.

10-20

5.Propiedad de simetría.

Para cualquier problema, el dual del dual es el primal.

10-21

RELACIONES ENTRE LOS PROBLEMAS PRIMAL Y DUAL

1. Si un problema tiene soluciones factibles y funcion objetivo acotada, entonces el otro tambien y los valores de la funcion objetivo en el optimo son iguaales.

2. Si uno de los problemas tiene soluciones factibles y funcion objetivo no acotada, entonces el otro es no factible.

3. Si un problema no tiene soluciones factibles, entonces el otro no tienes soluciones factibles o tiene la funcion objetivo no acotada

10-22