Clase # 9

La teoría del método simplex.

El método simplex revisado.

El método simplex original es un procedimiento algebraico directo.

Sin embargo, durante su cálculo utiliza muchos valores los cuales finalmente no son relevantes en la toma de decisiones.

El método simplex revisado utiliza únicamente:

- **Los coeficientes de las V.N.B en el renglón (0).**
- **Los coeficientes de la variable básica entrante en las restricciones.**
- **Los coeficientes de las V.B actuales en las restricciones.**
- **El lado derecho de las ecuaciones.**

El método simplex revisado utiliza una notación de forma matricial para hallar la solución al problema.

$$\text{Max} \quad Z = \underline{c}\ \underline{x}$$

Sujeto a

$$\underline{A}\ \underline{x} \le \underline{b}$$

$$\underline{x} \ge \underline{0}$$

$\underline{c}$: Vector fila Costos

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

$\underline{b}$: Vector columna recursos

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$\underline{x}$: Vector columna variables de decisión.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$\underline{0}$: Vector columna de ceros

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$\underline{A}$: Matriz de coeficientes tecnológicos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Para obtener la forma aumentada se introduce

$\underline{x}_s$: Vector columna de variables de holgura

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}_{n+m \times 1}$$

Las restricciones se convierten en:

$\underline{A}\,\underline{x} + \underline{I}\,\underline{X}_s = \underline{b}$ $\underline{x} \geq 0$ $\underline{x}_s \geq 0$

Obtención de una S.B.F

La forma en la cual se obtiene una nueva S.B.F es una de las ventajas del método simplex revisado

$$\begin{bmatrix}\underline{A}, \underline{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x} \\ \underline{x}_s\end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Se tienen *n - m* V.N.B. Estas *n - m* variables son iguales a cero, y por lo tanto se pueden eliminar de las ecuaciones.

Como el sistema total tiene n variables, al eliminar las V.N.B, obtenemos un sistema con m variables y m ecuaciones

$\underline{A}\,\underline{x} + \underline{I}\,\underline{X}_s = \underline{b}$

$\underline{N}\,\underbrace{\cancel{\underline{X}_{NB}}}_{0} + \underline{B}\,\underline{x}_B = \underline{b}$

$\underline{x}_B$ **: Vector columna V.B**

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bn} \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Se obtiene al eliminar las n V.N.B de $\begin{bmatrix}\underline{x} \\ \underline{x}_s\end{bmatrix}$

$\underline{B}$ **: Matriz Base**

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Se obtiene al eliminar las columnas correspondientes a los coeficientes de las V.N.B de $\begin{bmatrix}\underline{A}, \underline{I}\end{bmatrix}$

$\underline{x}_{NB}$ **: Vector columna V.N.B**

$$\begin{bmatrix} x_{NB1} \\ x_{NB2} \\ \vdots \\ X_{NBn} \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$\underline{N}$ **: Matriz N**

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1n} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{m1} & N_{m2} & \cdots & N_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Contiene los coeficientes de las V.N.B en las ecuaciones, excepto la ecuación (0)

Se puede ver que:

$\underline{B}\,\underline{x}_B = \mathbf{b}$

Y premultiplicando por : $\mathbf{B}^{-1}$

$\underline{B}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{x}_B = \underline{B}^{-1}\,\underline{b}$

$\boxed{\underline{x}_B = \underline{B}^{-1}\,\underline{b}}$

Sea $\underline{c}_B$ el vector cuyos elementos son los coeficientes de las V.B en la función objetivo (inicialmente deben ser ceros).

$Z = \underline{c}_B\,\underline{X}_B$

Como $\boxed{\underline{x}_B = \underline{B}^{-1}\,\underline{b}}$

$\boxed{\underline{c}_B\,\underline{X}_B = \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1}\,\underline{b}}$

Veamos como se aplica el método con un ejemplo como el de la Wyndor

$\underline{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \underline{A}, \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{x_s} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

Iteración 0

$\underline{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Variables de holgura básicas inicialmente

$$\underline{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \underline{B}^{-1}$$

sigue

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$\underline{c_B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Z = \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

Iteración 1 : Entra X_2 sale X_4

$\underline{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$

$$\underline{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿Recuerda como calcular la inversa de B? $\longrightarrow$ $\underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

sigue

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\underline{c_B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$Z = \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

Iteración 2 : Entra X_1 sale X_5

$\underline{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

$$\underline{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

sigue

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z = \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

Forma matricial del conjunto de ecuaciones.

Una tabla simplex puede expresarse en forma matricial.

Para el conjunto original, la forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{-c} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix}$$

Hacer un pivote es equivalente a premultiplicar por

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

en la tabla original

Se sabe que después de cualquier iteración

$$\boxed{\underline{x}_B = \underline{B}^{-1}\ \underline{b}}$$

$$\boxed{Z = \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\ \underline{b}}$$

Luego el lado derecho de las ecuaciones será:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \underline{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\ \underline{b} \\ \underline{B}^{-1}\ \underline{b} \end{bmatrix}$$

Lado derecho original

Aplicando este mismo conjunto de operaciones sobre el lado izquierdo original

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{-c} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A} & \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\underline{A} - \underline{c}) & \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1}\underline{A} & \underline{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

Luego, el conjunto de ecuaciones que se busca, después de cualquier iteración será:

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\underline{A} - \underline{c} & \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1}\underline{A} & \underline{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c_B}\ \underline{B^{-1}}\underline{b} \\ \underline{B}^{-1}\underline{b} \end{bmatrix}$$

Veamos un ejemplo para ilustrar estos conceptos.

$$\begin{array}{c} \quad x_3 \;\; x_2 \;\; x_1 \\ \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Empleemos la matriz inversa B^{-1} en la iteración 2

$$\underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^{-1}\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_B\, \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_B\, \underline{B}^{-1}\, \underline{A} - \underline{c} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resumiendo:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1}\underline{A} - \underline{c} & \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1}\underline{A} & \underline{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1}\underline{b} \\ \underline{B}^{-1}\underline{b} \end{bmatrix}$$

La tabla simplex matricial tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1}\underline{A} - \underline{c} & \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1} & \underline{c}_B\,\underline{B}^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} & \underline{B}^{-1}\underline{A} & \underline{B}^{-1} & \underline{B}^{-1}\underline{b} \end{bmatrix}$$

Resumen del método simplex revisado.

1. Paso Inicial: Hallar S.B.F inicial.

2. Iteración:

Paso 1 : Determinar la variable que entra a la base.

Paso 2 : Determinar la variable que sale de la base.

Paso 3 : Determinar la nueva S.B.F: Obtener B^{-1} y

$$\boxed{\underline{x}_B = \underline{B}^{-1}\, \underline{b}}$$

sigue

3. Prueba de optimalidad: Se calculan sólo los números necesarios para realizar esta prueba. Coeficientes de las V.N.B en la ecuación (0)