Clase # 8

ADAPTACIÓN A OTRAS FORMAS DEL MODELO.

8-1

Hasta el momento sólo se han estudiado problemas en la forma estándar

- **Maximizar Z.**
- **Restricciones de la forma $\leq$.**
- **Todas las variables no negativas.**
- **$b_i \geq 0$ para toda i = 1,2,...,m**

8-2

Forma estándar

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

Sujeto a

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 ,\ X_2 \geq 0$$

8-3

Existen variaciones cuando:

- **Restricciones en forma de igualdad.**
- **Lados derechos negativos.**
- **Restricciones de la forma $\geq$.**
- **Función objetivo minimizar.**

8-4

1.Restricciones en forma de igualdad.

Cualquier restricción del tipo

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}X_n = b_1$$

Es equivalente a

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}X_n \geq b_1$$

Esto es inconveniente pues se aumenta el número de restricciones

8-5

Lo que se hace entonces es introducir variables artificiales

Veamos un ejemplo

8-6

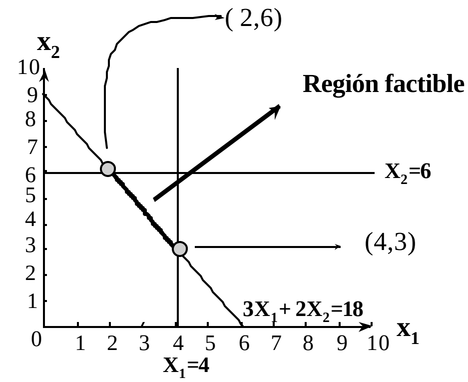
Cambiemos la tercera restricción de desigualdad en el ejemplo de la Wyndor Glas c.o , por una igualdad.

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

Sujeto a

$$X_1 \le 4$$
$$2X_2 \le 12$$
$$3X_1 + 2X_2 = 18$$
$$X_1 \,,\; X_2 \ge 0$$

8-7



8-8

La forma aumentada de este problema es:

(0)	$Z - 3X_1 - 5X_2$				$=0$
(1)	X_1		$+X_3$		$= 4$
(2)		$2X_2$		$+X_4$	$= 12$
(3)	$3X_1 + 2X_2$				$= 18$

Observe que no está completa la matriz identidad.

8-9

¿Cual es la S.B.F inicial?

Es necesario introducir variables artificiales (2 pasos).

8-10

Variables artificiales.

- Facilitan hallar una S.B.F inicial.
- Deben cumplir requerimientos de no negatividad.
- Se deben introducir penalizaciones muy grandes en la función objetivo.
- Se convierten en V.B en la ecuación en que han sido introducidas.
- El proceso iterativo del simplex se deshace de ellas.

8-11

Paso 1.

Se introduce una variable *artificial* $\overline{X}_5$

$$3X_1 + 2X_2 \quad + \quad \overline{X}_5 \quad = 18$$

Es muy similar a introducir una variable de holgura

8-12

Paso 2.

Se asigna una penalización enorme en la función objetivo por el hecho de tener $\overline{X}_5 \geq 0$

Se modifica la función objetivo

⇓

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2 - M\overline{X}_5$

8-13

Este método se llama el método de la M grande, pues <u>M</u> representa un número muy grande

8-14

La forma aumentada del problema artificial es:

$$
\begin{array}{lllll}
(0) & Z - 3X_1 - 5X_2 & & + M\overline{X}_5 & = 0 \\
(1) & X_1 & + X_3 & & = 4 \\
(2) & 2X_2 & + X_4 & & = 12 \\
(3) & 3X_1 + 2X_2 & & + \overline{X}_5 & = 18
\end{array}
$$

8-15

La S.B.F inicial en este problema sería entonces:

$$X_1=0 \,,\; X_2=0 \,,$$

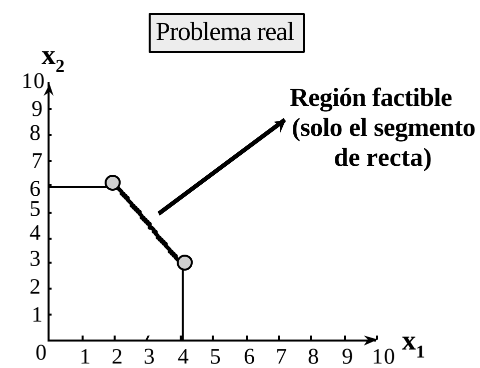
$$X_3=4 \,,\; X_4=12 \,,\; \overline{X}_5=18$$

8-16

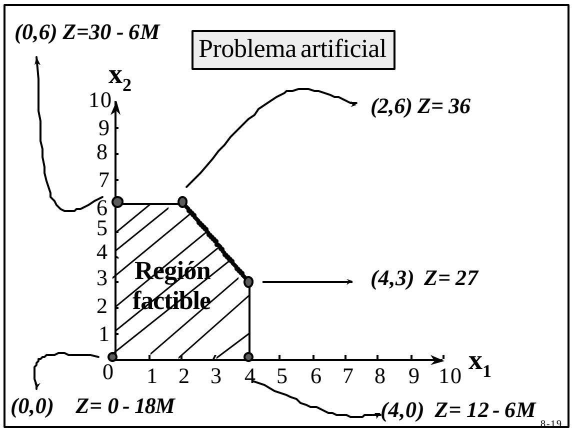
<u>Comparemos los problemas.</u>

Problema real	Problema artificial
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3X_1 + 5X_2 - M\overline{X}_5$
Sujeto a	Sujeto a
$X_1 \leq 4$	$X_1 \leq 4$
$2X_2 \leq 12$	$2X_2 \leq 12$
	$3X_1 + 2X_2 \leq 18$
$3X_1 + 2X_2 = 18$	Así $3X_1 + 2X_2 + \overline{X}_5 = 18$
$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2, \overline{X}_5 \geq 0$

8-17



8-18



Nótese que ambos problemas son similares cuando $\overline{X}_5 = 0$

8-20

Recordemos la forma aumentada del problema artificial

$$
\begin{array}{ll}
(0) & Z - 3X_1 - 5X_2 + M\overline{X}_5 = 0 \\
(1) & X_1 + X_3 = 4 \\
(2) & 2X_2 + X_4 = 12 \\
(3) & 3X_1 + 2X_2 + \overline{X}_5 = 18
\end{array}
$$

8-21

Este sistema no se encuentra en la forma apropiada de la Eliminación Gaussiana.

↓

El renglón (0) debe modificarse antes de empezar a encontrar la solución óptima

Ojo: En el renglón (0), los coeficientes de las variables artificiales deben ser cero

8-22

$$
\begin{array}{l}
Z - 3X_1 - 5X_2 + M\overline{X}_5 = 0 \\
- M\,(3X_1 + 2X_2 + \overline{X}_5 = 18) \\
\hline
Z - (3M+3)\,X_1 - (2M+5)\,X_2 = -18M
\end{array}
$$

Este nuevo renglón (0) queda expresado solamente en términos de las V.N.B

8-23

Ya conocemos bien el procedimiento empleado por el método simplex. Este caso es igual y se procede de la misma manera.

Veamos las tablas simplex →

8-24

1

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	L.D
0	*Z*	*(0)*	*1*	*-3M -3*	*-2M-5*	*0*	*0*	*0*	*-18M*
	X_3	*(1)*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*4*
	X_4	*(2)*	*0*	*0*	*2*	*0*	*1*	*0*	*12*
	$\overline{X}_5$	*(3)*	*0*	*3*	*2*	*0*	*0*	*1*	*18*

8-25

2

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	L.D
1	*Z*	*(0)*	*1*	*0*	*-2M-5*	*3M + 3*	*0*	*0*	*-6M+12*
	X_1	*(1)*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*4*
	X_4	*(2)*	*0*	*0*	*2*	*0*	*1*	*0*	*12*
	$\overline{X}_5$	*(3)*	*0*	*0*	*2*	*-3*	*0*	*1*	*6*

8-26

3

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	L.D
2	*Z*	*(0)*	*1*	*0*	*0*	*-9/2*	*0*	*M+5/2*	*27*
	X_1	*(1)*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*4*
	X_4	*(2)*	*0*	*0*	*0*	*3*	*1*	*-1*	*6*
	X_2	*(3)*	*0*	*0*	*1*	*-3/2*	*0*	*1/2*	*3*

8-27

4

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	L.D
3	*Z*	*(0)*	*1*	*0*	*0*	*0*	*3/2*	*M+1*	*36*
	X_1	*(1)*	*0*	*1*	*0*	*0*	*-1/3*	*1/3*	*2*
	X_3	*(2)*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1/3*	*-1/3*	*2*
	X_2	*(3)*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1/2*	*0*	*3*

8-28

Observe que la variable $\overline{X}_5$ es una V.B en las 2 primeras tablas simplex.

Las 2 primeras S.B.F para este problema artificial son no factibles para el problema real

8-29

2.Lados derechos negativos.

Si se tiene una igualdad con lado derecho negativo, simplemente se multiplica por (-1)

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n = -bi$$
$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}X_n = bi$$

Se puede usar también con las desigualdades

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \leq -b_1$$
$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}X_n \geq b_1$$

8-30

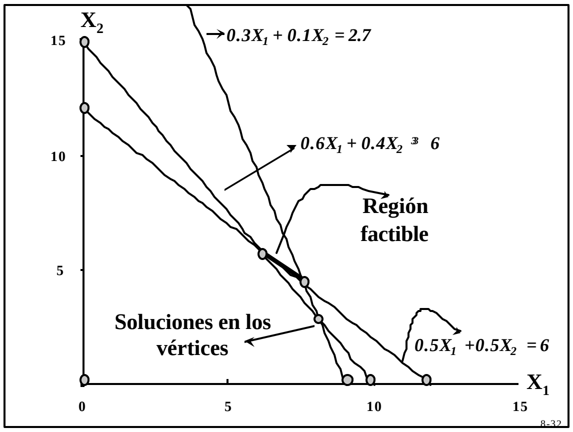
3.Restricciones de la forma $\geq$.

Para ilustrar como se manejan este tipo de restricciones veamos un ejemplo.

Minimizar $Z = 0.4X_1 + 0.5X_2$

Sujeto a

$$0.3X_1 + 0.1X_2 \leq 2.7$$
$$0.5X_1 + 0.5X_2 = 6$$
$$0.6X_1 + 0.4X_2 \geq 6$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$



Por ahora dejemos de lado el hecho que la función objetivo sea minimizar y concentrémonos en la tercera restricción.

1. **Restamos una variable de exceso o superávit en la restricción $\geq$ para convertirla en igualdad.**

$$0.6X_1 + 0.4X_2 - \boxed{X_5} = 6$$

2. **A esta restricción se le adiciona una variable artificial, para hallar la S.B.F inicial.**

$$0.6X_1 + 0.4X_2 - X_5 + \boxed{\overline{X}_6} = 6$$

La forma aumentada del problema artificial es:

$$Min\ Z = 0.4X_1 + 0.5X_2 \quad + M\overline{X}_4 \quad + M\overline{X}_6 = 0$$

Sujeto a

$$0.3X_1 + 0.1X_2 + X_3 = 2.7$$
$$0.5X_1 + 0.5X_2 + \overline{X}_4 = 6$$
$$0.6X_1 + 0.4X_2 - X_5 + \overline{X}_6 = 6$$
$$X_1 , X_2, X_3, \overline{X}_4 , X_5, \overline{X}_6 \geq 0$$

Observe que los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo son +M en lugar de -M, porque ahora se tiene que minimizar.

Comparemos ahora el problema real con el problema artificial

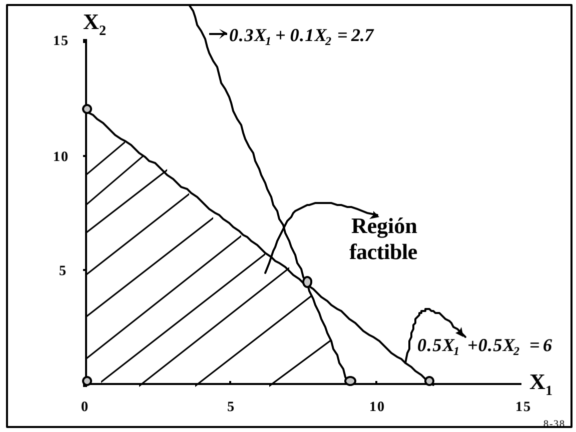
Restricciones sobre (X_1,X_2)

Problema real	Problema artificial
$0.3X_1 + 0.1X_2 \leq 2.7$	$0.3X_1 + 0.1X_2 \leq 2.7$
$0.5X_1 + 0.5X_2 = 6$	$0.5X_1 + 0.5X_2 \leq 6$ *(=se cumple cuando $\overline{X}_4$=0)*
$0.6X_1 + 0.4X_2 \geq 6$	*No se considera* *(excepto si $\overline{X}_6$=0)*
$X_1 , X_2 \geq 0$	$X_1 , X_2, \overline{X}_5 \geq 0$

La tercera restricción no se considera debido a que la diferencia $X_5 - X_6$ puede ser un número positivo o negativo, y entonces la recta $0.6X_1 + 0.4X_2 = 6$ puede desplazarse libremente hacia la derecha o izquierda.

Veamos como se amplía la región factible para el problema artificial.

8-37



4.Minimización.

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

es equivalente a

$$\text{Max } -Z = \sum_{j=1}^{n} (-C_j X_j)$$

8-39

Otra forma para enfrentar el problema de minimización es cambiar en el método simplex los criterios de vector que entra y optimalidad.

8-40

Transformando la función objetivo

$$\text{Min } Z = 0.4X_1 + 0.5X_2 \quad + M\overline{X}_4 \quad + M\overline{X}_6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Max } -Z = -0.4X_1 - 0.5X_2 \quad - M\overline{X}_4 \quad - M\overline{X}_6 = 0$$

8-41

La forma aumentada del problema artificial a resolver es:

$$
\begin{array}{lllllll}
(0) & -Z + 0.4X_1 + 0.5X_2 & & +M\overline{X}_4 & & +M\overline{X}_6 & = 0 \\
(1) & 0.3X_1 + 0.1X_2 + X_3 & & & & & = 2.7 \\
(2) & 0.5X_1 + 0.5X_2 & & +\overline{X}_4 & & & = 6 \\
(3) & 0.6X_1 + 0.4X_2 & & & -X_5 & +\overline{X}_6 & = 6
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, X_3, \overline{X}_4, X_5, \overline{X}_6 \geq 0$$

8-42

El problema se debe colocar en la forma estándar de la Eliminación Gaussiana.

$$-Z + 0.4X_1 + 0.5X_2 \qquad + M\overline{X}_4 \quad + M\overline{X}_6 = 0$$
$$-\quad M(0.5X_1 + 0.5X_2 \qquad + \overline{X}_4 \qquad = 6)$$
$$-\quad M(0.6X_1 + 0.4X_2 \qquad - \overline{X}_5 + \overline{X}_6 = 6)$$
$$-Z + (0.4 - 1.1M)X_1 + (0.5 - 0.9M)X_2 + MX_5 = 12M$$

Veamos las tablas simplex

8-43

1

Iter	V.B	Ec #	Z	X_1	X_2	X_3	$\overline{X}_4$	X_5	$\overline{X}_6$	L.D
			Coeficientes							
0	Z	(0)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
	X_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\overline{X}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\overline{X}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6

8-44

2

Iter	V.B	Ec #	Z	X_1	X_2	X_3	$\overline{X}_4$	X_5	$\overline{X}_6$	L.D
			Coeficientes							
0	Z	(0)	-1	0	$\frac{-16M+11}{30}$	$\frac{11M-4}{3}$	0	M	0	-2.1M-3.6
	X_1	(1)	0	1	1/3	10/3	0	0	0	9
	$\overline{X}_4$	(2)	0	0	1/3	5/3	1	0	0	1.5
	$\overline{X}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6

8-45

3

Iter	V.B	Ec #	Z	X_1	X_2	X_3	$\overline{X}_4$	X_5	$\overline{X}_6$	L.D
			Coeficientes							
0	Z	(0)	-1	0	0	$\frac{-5M+7}{3}$	0	$\frac{-5M}{3}+\frac{11}{6}$	$\frac{8M}{3}-\frac{11}{6}$	-0.5M-4.7
	X_1	(1)	0	1	0	20/3	0	5/3	-5/3	8
	$\overline{X}_4$	(2)	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5
	X_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3

8-46

4

Iter	V.B	Ec #	Z	X_1	X_2	X_3	$\overline{X}_4$	X_5	$\overline{X}_6$	L.D
			Coeficientes							
0	Z	(0)	-1	0	0	0.5	M-1.1	0	M	-5.25
	X_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7.5
	X_5	(2)	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	X_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4.5

8-47

Variables que pueden ser negativas.

Algunas veces, las variables de decisión pueden tomar valores negativos

El algoritmo simplex exige hallar un problema equivalente que sólo contenga variables no negativas, debido al procedimiento para hallar la variable básica que sale.

8-48

1.Variables con cota.

Considere cualquier variable de decisión que puede tener valores negativos, pero nada más aquellos que satisfacen una restricción de la forma

X_j ³ L_j

donde Lj es una constante.

8-49

Se define entonces:

X_j' $= X_j - L_j$ donde X_j' ³ 0

Para ver esto, suponga que X_1 representa el aumento en la tasa de producción del producto 1 (puertas). Actualmente la tasa de producción es de 10 unidades.

X_1 ³ -10

Esta variable se reemplaza por

$X_1' = X_1 - (-10)$ donde X_1' ³ 0

8-50

Comparemos los problemas.

Problema original	Problema equivalente
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3(X_1' - 10) + 5X_2$
Sujeto a	Sujeto a
X_1 £ 4	$X_1' - 10$ £ 4
$2X_2$ £ 12	$2X_2$ £ 12
$3X_1 + 2X_2$ £ 18	$3(X_1' - 10) + 2X_2$ £ 18
X_1 ³ -10, X_2 ³ 0	X_1' ³ 0, X_2 ³ 0

8-51

2.Variables no restringidas en signo (n.r.s).

En este caso se debe cambiar la variable n.r.s , por la diferencia de 2 variables no negativas.

X_j n.r.s

$X_j = X_j^+ - X_j^-$

8-52

Comparemos los problemas.

Problema original	Problema equivalente
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3(X_1^+ - X_1^-) + 5X_2$
Sujeto a	Sujeto a
X_1 £ 4	$X_1^+ - X_1^-$ £ 4
$2X_2$ £ 12	$2X_2$ £ 12
$3X_1 + 2X_2$ £ 18	$3(X_1^+ - X_1^-) + 2X_2$ £ 18
X_1 ³ n.r.s , X_2 ³ 0	X_1^+ , X_1^- ³ 0 , X_2 ³ 0

8-53